International Journal of

Modern Statistics

(IJMS)

Sur Une Des Liaisons Des Equations D'euler Lagrange A Celles De Hamilton Par Le Theoreme De L. Noether

CARI Journals

Sur Une Des Liaisons Des Equations D'euler Lagrange A Celles De Hamilton Par Le Théorème De L. Noether

Tamba Of'rI'shii Gordien

Département de Mathématique et Informatique, Université Pédagogique Nationale

Accepted: 15th Aug 2024 Received in Revised Form: 15th Sep 2024 Published: 15th Oct 2024

Résumé

Dans cet article, nous avons retracé quelques théories en physique qui sont décrites par les Lagrangiens, par les hamiltoniens associés. Ensuite, nous avons établi le lien entre les équations d'Euler-Lagrange à celles d'Hamilton en s'appuyant sur un résultat que nous avons obtenu : « les fonctions $\frac{\partial L}{\partial q}$ et $\frac{\partial H}{\partial p}$ sont des difféomorphismes réciproques », L représente le lagrangien d'un phénomène, H est l'Hamiltonien associé, q et p respectivement la coordonnée généralisée du phénomène et le moment conjugué du Lagrangien par rapport à q. En prouvant que $\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t),t)}{\partial q}$ qui est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange, est aussi une solution des équations d'Hamilton donc une intégrale première, nous avons rejoint le théorème de Noether qui affirme que $\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t),t)}{\partial q}$ est une intégrale première où W est une symétrie infinitésimale du Lagrangien.

Mots clés : *Métrique, Problèmes Variationnels, Fonction Lisse, Géodésie, Quasi Périodicité.*

Abstract

In this paper, we have traced some theories in physics which are described by the Lagrangian, by the associated Hamiltonian. Then, we made the connection between the Euler-Lagrange equations to those of Hamilton basing on a result we got : « the functions $\frac{\partial L}{\partial q}$ and $\frac{\partial H}{\partial p}$ are reciprocal diffeomorphisms », L represents the Lagrangian of a phenomen. On his the associated Hamiltonian q and p respectively the generalized coordinate of phenomenon and the conjugate momentum of the Lagrangian with respect to q. By proving that $\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t),t)}{\partial q}$, which is a solution of the Euler-Lagrange equation, is also a solution of Hamilton equations therefore a first integral. We have joined Noether's theorem which states that $\frac{\partial L(q(t),\dot{q}(t),t)}{\partial q}$ is a first integral where W is an infinitesimal symmetry of the Lagrangian.

Keywords : *Metric, Variationals Problems, Smoth Function, Geodesy, Near Periodicity*.

INTRODUCTION

La plupart des théories en physique sont décrites soit par un Lagrangien soit par un Hamiltonien. Si le point de vue lagrangien est proche de problème de contrôle optimal, le point de vue hamiltonien, est celui qui se prête le mieux ç la quantification à la faveur de physiciens. Nous allons par cette étude établir une équivalence entre les équations d'Euler Lagrange et celles d'Hamilton. Cela éclaire la théorie de Noether et ouvre la voie d'une méthode dite d'Hamilton-Jacobi, pour trouver les intégrales premières qui ne sont pas nécessairement liées à des symétries. Nous désignerons par q un point de l'espace et $\dot{q}$ son vecteur.

1. EQUATION D'EULER

Avant de donner la définition générale d'un problème variationnel lagrangien, on décrit deux exemples, la recherches des plus courts chemins sur une surface et le principe de Fermat en optique géométrique. Une fois obtenu, les équations qui caractérisent les extrémales, on reconnaitra la nature variationnelle des équations de la dynamique pour une particule dans un champ de potentiel (principe de moindre action de Hamilton).

1.1. Métriques riemanniennes

Définition 1.1. Soit U un ouvert de R^n. Une métrique riemannienne sur U est la donnée d'une application lisse g de U dans l'espace vectoriel des formes quadratiques sur R^n, telle que, pour tout $q \in U, g_q$ soit définie positive. Etant donnés des coordonnées $q = (q_1, \dots, q_n)$ sur R^n, on peut écrire

$$g_q = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\, dq_i dq_j.$$

Si $t \to q(t), [a, b] \to U,$ est une courbe lisse dans U, sa longueur est

$$Long\ (c) = \int_a^b \sqrt{g_q(t)(\dot{q}(t))}dt.$$

1.2. Optique géométrique

La vitesse à laquelle la lumière voyage dans un milieu transparent n'est pas constante en général, elle dépend du point où on se trouve, et parfois aussi de la direction (milieux anisotropes). L'indice du milieu en un point q (et dans une direction $\dot{q}$) est le quotient de la vitesse de la lumière dans le vide par la vitesse de la lumière dans le milieu, $n(q, \dot{q}) = c/v \geq 1$

Le Principe de Fermat énonce que le trajet suivi par un rayon lumineux qui passe par deux points Q_1 et Q_2 minimise le temps de parcours parmi tous les trajets possibles. Le long d'un chemin $t \to q(t),$ la vitesse vaut $v = \|\dot{q}(t)\|$. Par conséquent, le temps de parcours vaut :

$$\int dt = \int \frac{1}{v}\|\dot{q}(t)\|dt = \int \frac{1}{c} n\big(q(t), \dot{q}(t)\big)\|\dot{q}(t)\|dt.$$

Si le matériau est isotrope (n ne dépend pas de la direction), cette intégrale (appelée parfois chemin optique) s'interprète comme la longueur relative à la métrique riemannienne $n^2 ds^2$, conforme à la métrique euclidienne, Si le matériau est anisotrope (c'est le cas de certains cristaux), on se trouve en présence d'un problème plus général, qui motive la définition suivante.

1.3. Problèmes variationnels lagrangiens

Définition 1. Soit U un ouvert de R^n. Un lagrangien sur U est la donnée d'une fonction lisse $L: UxR^n x[a,b] \to R$. Le problème variationnel associé (variationnal problem) consiste à chercher, étant donnés deux points Q_1 et Q_2 de U. les courbes c: $[a,b]$ U tracées dans U, telles que

$(a) = Q_1$ et $c(b) = Q_2$ qui minimisent la fonctionnelle

$$\Phi(c) = \int_a^b L\big(c(t)\big), \dot{c}\,(t), t)dt$$

Lemme 1. La fonction Φ est différentiable, sa différentiable est donnée par la formule suivante. Soit

$s \to c_s$ une famille lisse de courbes telle que $c_0 = c\ et\ \frac{d}{dt} c_{s/s=0} = h$. Alors

$$\frac{d}{ds}\Phi(C_s)_{s=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q}(c(t), \dot{c}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(c(t), \dot{c}(t), t)\right)\right)\big(h(t)\big)dt$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial q}(c(b), \dot{c}b, b)\big(h(b)\big) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(c(a), \dot{c}a, a)h(a).$$

Preuve. On dérive sous le signe somme,

$$\frac{d}{dt}\Phi(C_s)_{/s=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q}(c(t), \dot{c}(t), t)h(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(c(t), \dot{c}(t), t)\right)h(t)\right)dt$$

puis on intègre par parties :

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(c(t), \dot{c}(t), t)\dot{h}(t))dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(c(t), \dot{c}(t), t)h(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(c(t), \dot{c}(t), t)h(t)dt\right)$$

1.4. Equations d'Euler-Lagrange

Définition 2. Une extrémale (extrémal curve) d'un problème variationnel lagrangien est une courbe qui annule la différentielle de Φ restreint aux courbes d'extrémités fixées.

Théorème 1. La courbe c est une extrémale du problème variationnel associé au lagrangien L si et seulement si tout $t\epsilon[a,b]$, la forme linéaire sur R^n.

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t)\right) = 0$$

Ce système de n équations différentielles du second ordre s'appelle les équations d'Euler-Lagrange du problème variationnel.

Preuve. Pour toute fonction lisse h sur $[a, b]$ à valeurs dans R^n qui s'annule aux extrémités, on considère une famille $c_s(t) = q(t) + sh(t)$ de courbes d'extrémités fixées dont h est la dérivée. Alors,

$$\frac{d}{ds}\Phi(C_s)_{/s=0} = \int_a^b j(t)\big(h(t)\big)dt$$

où $j(t)$ est la forme linéaire sur R^n donnée par :

$$J(s) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t)\right)$$

c est extrémale si et seulement si $\int_a^b j(t)\big(h(t)\big)dt$ pour toute fonction lisse h sur $[a, b]$ qui s'annule aux extrémités. Le lemme suivant entraine que c est extrémale si et seulement si $J = 0$.

Lemme 2. Soit J une forme linéaire sur R^n dépendant differentiablement $t \in [a, b]$. On suppose que pour toute fonction lisse h sur $[a, b]$ à valeurs dans R^n, nulle au voisinage des extrémités.

$$\int_a^b J(t)\big(h(t)\big)dt = 0. Alors\ J = 0.$$

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe $\hat{t} \in]a, b[$ tel que $J(t) \neq 0$. Soit $H(t) = J(t)^T$ le vecteur dual de $J(t)$. Soit χ une fonction lisse, positive ou nulle, à support dans un petit visage de $\hat{t}$. On pose $h(t) = \chi(t)H(t)$. Si le support de χ est assez petit, $\int_a^b J(t)\big(h(t)\big)dt = \int_a^b \chi(t)\|J(t)\|^2 dt > 0$, contradiction.

Remarque 1. On appelle géodésiques d'une variété riemannienne les extrémales du lagrangien $L^2(q, \dot{q}) = g_p(\dot{q})$ qui est le carré de la norme. Alors les géodésiques coïncident avec les extrémales de L qui sont parcourus à vitesse constante.

Il reste à vérifier que $L^2(q, \dot{q}) = g_q(\dot{q})$ est constant le long d'une géodésique, $i.e.$ d'une extrémale L^2. Comme L^2 est homogène de degré 2 par rapport à $\dot{q}$,

$$2L^2(q, \dot{q}) = \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})\dot{q}$$

En dérivant par rapport à t, et en utilisant les équations d'Euler-Lagrange pour L^2, à savoir

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})\right),$$

il vient

$$\frac{d}{dt}2L^2(q,\dot{q}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\dot{q}\right) + \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\ddot{q} = \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\dot{q} + \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\ddot{q} = \frac{d}{dt}L^2(q,\dot{q})$$

Donc $\frac{d}{dt}L^2(q,\dot{q}) = 0$

1.5. Principe de moindre action de Hamilton

Cherchant à calquer la mécanique sur l'optique géométrique, Hamilton a observé que le mouvement d'un produit matériel dans un champ de potentiel est solution d'un problème variationnel lagrangien.

Proposition 1. Considérons un point matériel de masse m évoluant dans un champ de force dérivant d'un potentiel V. Les équations de la dynamique newtonienne.

$$\frac{d}{dt}\big(m\dot{q}(t)\big) = -\nabla_{q(t)}V$$

qui le gouvernent coïncident avec les équations d'Euler-Lagrange $L = T - V$ où $T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ est l'énergie cinétique et $V = V(q)$ est l'énergie potentielle.

Preuve. Par définition, $\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$. On note $\dot{q}^b$ la forme linéaire duale d'un vecteur q, de sorte que $dV = (\nabla\nabla)^b$. Alors $\frac{\partial T}{\partial q} = m\dot{q}^b$. Il vient $\frac{\partial (T-V)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}}\big(q(t),\dot{q}(t)\big)\right) = -dV - \frac{d}{dt}(m\dot{q}(t)^b)$, donc les équations d'Euler-Lagrange sont équivalentes à $\nabla_{q(T)}V + \frac{d}{dt}(m\dot{q}(t)^b) = 0$.

1.6. Problèmes varationnels lagrangiens sur les variétés

On peut parler de problèmes lagrangiens sur les variétés.

Soit M une variété différentiable. Une lagrangien L sur M est une fonction sur l'espace tangent TM. Le problème variationnel correspondant consiste à minimiser l'intégrale $\Phi = \int L(q(t),\dot{q}(t))\,dt$ parmi les courbes tracées sur M, d'extrémités fixées.

Exemple 2. Soit $L(q,\dot{q})$ un lagrangien sur R^3 et MCR^3 une surface. Les équations d'Euler-Lagrange du problème variationnel associées à la restriction de L à TM s'écrivent comme suit : pour tout t, la forme linéaire

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q}(t),\dot{q}(t))\right)$$

s'annule sur $T_{q(t)}M$.

En effet, si $q: [a,b] \to M$ est une courbe tracée sur M, toute application $h: [a,b] \to R^3$ tel que $h(t) \in T_{q(t)}M$ (on appelle cela un champ de vecteurs le long de q) est la dérivée première d'une famille de courbes tracées sur M. Une variante du lemme 1 donne alors que une extrémale du problème restreint. Le champ de formes linéaires $J(t) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$ s'annule sur TM.

Inversement, si pour tout t, $J(\dot{q}(t))$ est nulle $T_{q(t)}M$, la différentielle de la fonctionnelle Φ restreinte aux courbes tracées sur M, d'extrémités fixées, est nulle.

Proposition 2. (*Principe de l'Alembert*). Soit V un potentiel sur R^3 et $M \subset R^3$, une surface. Les équations de la dynamique pour un point matériel astreint à se déplacer sur M dérivent d'un problème variationnel sur M, c'est le problème associé à la restriction de $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V$ à TM.

Preuve. Pour obtenir les équations du mouvement $t \to q(t)$, on écrit le principe fondamental de la dynamique en ajoutant une force inconnue, normale à la surface M, la réaction. Autrement dit, l'équation s'écrit

$$m\ddot{q} + \nabla_{q(t)} V \text{ est normal à } T_{q(t)}M. \text{ Or si, } L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q),$$

$$J(t) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = -\left(m\ddot{q}(t) + \nabla_{q(t)} V\right)^b$$

Dire que $J(t)$ s'annule sur $T_{q(t)}M$, c'est dire que $m\ddot{q} + \nabla_{q(t)} V$ est orthogonale à $T_{q(t)}M$.

1.7. Mouvement du solide

Un solide, ce sont des points reliés par une contrainte ; leurs distances mutuelles restent constantes. Autrement dit, le mouvement d'un solide dans un champ de forces, c'est le mouvement d'un point dans une sous-variété d'un espace produit. Le principe de d'Alembert indique que, lorsque le champ de forces dérive d'un potentiel, les équations du mouvement du solide résultent encore d'un problème variationnel.

Un solide, c'est aussi un ensemble S de l'espace, muni d'une densité de matière ρ, transporté par des déplacements $D(t)$. L'ensemble des déplacements forme une variété de dimension 6, plongée dans l'ensemble des matrices 4x4. En effet, un déplacement est une transformation affine dont la partie linéaire est une rotation c'est-à-dire une matrice 4x4 de la forme $D = \begin{pmatrix} R & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $v \in R^3, R^T R = I$ et $\det(R) = 1$. On va écrire le problème variationnel dans cette seconde description.

Supposons d'abord le solide formé d'un nombre fini de points q_i de masses m_i.

Son énergie cinétique vaut $T = \sum \frac{1}{2} m_i \ddot{q}_i^2$, son énergie potentielle $U = \sum V(q_i)$. Le mouvement est gouverné par lagrangien $T - U$.

Posons à la limite continue, l'énergie cinétique devient $T = \int_S \frac{1}{2}\dot{q}^2 \rho(q)dq$ et l'énergie potentielle $U = \int_S V(q)dq$. Chaque point q du solide au repos a pour position $q(t) = D(t)q$ dans le solide en mouvement. Par conséquence le mouvement est gouverné par la lagrangien

$$L(D,\dot{D}) = \int_S \frac{1}{2}\left\|\dot{D}(q)\right\|^2 \rho(q)dq - \int_S V(Dq)dq$$

restreint à la sous-variétés des déplacements.

1.8. La toupie

International Journal of Modern Statistics
ISSN: 2958-8340 (Online)
Vol. 4, Issue No. 1, pp 33 - 48, 2024
www.carijournals.org

Il s'agit d'étudier le mouvement d'un solide tournant autour d'un point fixe (sa pointe), soumis à la seule gravité. Dans ce cas, on se limite aux déplacements fixant l'origine, $i.e.$ aux rotations. C'est la sous-variété de dimension 3 de l'espace vectoriel des matrices 3x3 définie par les équations $R^T R = I$ et $\det(R) = 1$. Le potentiel gravitationnel terrestre, en première approximation, est uniforme : $V(q_i) = m_i g q_z$ où g est la constante de gravitation et $q = (q_x, q_y, q_z)$. L'énergie potentielle du solide devient $U = g\int_s q_z \rho(q)dq = mgG_z$ où $m = \int_s \rho(q)dq$ est la masse totale de S et G son centre de gravité. On obtient le lagrangien

$$L(R, \dot{R}) = \int_s \frac{1}{2}\left\|\dot{R}(q)\right\|^2 \rho(q)dq - mgR(G)_z.$$

La dérivée logarithmique $R^{-1}\dot{R}$ d'une famille de rotations est endomorphisme antisymétrique. Il existe donc un unique vecteur Ω tel que $R^{-1}\dot{R}_q = \Omega \wedge q$, c'est le vecteur vitesse angulaire par rapport au solide du mouvement. Sa direction est l'axe instantanée de rotation du solide. En effet, au premier ordre, on peut assimiler le mouvement à une rotation.

Définition 3. L'application $\Omega \to A(\Omega) = \int_s \|\Omega \wedge q\|^2 \rho(q)dq$ est une forme quadratique appelée le tenseur d'inertie de S par rapport à l'origine.

$$L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}A\left(R^{-1}\dot{R}\right) - mgR(G)_z$$

2. INTEGRALES PREMIERES

Définition 4. Une intégrale (first intégral) d'une équation ordinaire est une fonction qui est constante le long des solutions.

Un système d'équations différentielles du premier ordre indépendantes du temps s'écrit $\dot{x}(x) = V(x(t))$ où V est un champ de vecteurs. Une fonction lisse f est une intégrale première si et seulement si la dérivée $Vf = 0$.

2.1. Symétrie

On va voir que les symétries d'un lagrangien produisent les intégrales premières des équations d'Euler-Lagrange correspondantes. Dans ce paragraphe, les lagrangiens $L: UxR^n \to UxR^n$ sont indépendants du temps.

Théorème 2. *(E. Noether)* Soit $L: UxR^n \to R$ un lagrangien indépendant du temps. Soit W une symétrie infinitésimale de LD. Alors la fonction f définie sur UxR^n par

$$f(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})(W(q))$$

est une intégrale première des équations d'Euler-Lagrange associée à L.

Preuve. En dérivant par rapport à s, en $s = 0$, l'équation

$$L\left(\Phi_{/s}(q), \frac{\partial \Phi_s}{\partial q}(q, \dot{q})\right) = L(q, \dot{q})$$

On trouve la condition que satisfont les symétries infinitésimales du Lagrange L,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\big(V(q)\big)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\left(\frac{\partial W}{\partial t}(q,\dot{q})\right)=0.$$

Soit $t \to (q(t),\dot{q}(t))$ est une solution des équations d'Euler-Lagrange. Alors

$$\frac{d}{dt}f(q,\dot{q})=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\right)w\big(q(t)\big)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})\left(\frac{\partial W}{\partial t}(q(t))\right)$$

$$=\left(\frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q})\right)w\big(q(t)\big)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q})*\left(\frac{\partial W}{\partial q}(\dot{q}(t))\right)=0$$

Remarque 2. Le théorème de Noether s'étend aux problèmes lagrangiens dans les variétés.

3. Mouvement du solide autour d'un point fixe, sans forces extérieures

Suivant Euler et Poinsot, on résout en détail l'exemple le plus simple de dynamique du solide, la toupie dont on néglige le poids.

3.1. Conservation du moment cinétique

L'espace de configuration est le groupe SO(3) des rotations. D'après le paragraphe 1.8. Le mouvement est gouverné par le Lagrangien.

$$L\big(R,\dot{R}\big)=\frac{1}{2}A\big(R^{-1}\dot{R}\big)$$

où A est le tenseur d'inertie du solide. Ce lagrangien est invariant par les translations à gauche de SO(3). En effet, si $h \in SO(3)$, la translation à gauche $L_h = R \to hR$ agit sur les vecteurs tangents par $TL_h\big(R,\dot{R}\big)=\big(hR,h\dot{R}\big)$.

Alors

$$LoTL_h\big(R,\dot{R}\big)=L\big(hR,h\dot{R}\big)=\frac{1}{2}A\big((hR^{-1})(hR)\big)=\frac{1}{2}A\big(R^{-1}\dot{R}\big)=L\big(R,\dot{R}\big)$$

Par conséquent, le théorème de Noether fournit un vecteur d'intégrales premières, le moment cinétique par rapport à l'origine dans le repère de l'espace du solide. Le moment cinétique d'un point est $\mu_i = m(\dot{q}_i \wedge q_i')$ celui du solide est

$$u(t)=\int_S q(t)\wedge \dot{q}(t)\rho(q)dq=\int_S R(t)q\wedge \dot{R}(t)q\rho(q)dq=R(t)M(t)$$

$$\text{où }\ M(t)=\int_S q\wedge R(t)^{-1}\dot{R}(t)q\rho(q)dq$$

est le moment cinétique dans le repère.

3.2. Equation d'Euler

Elle consiste à transformer les équations du mouvement qui sont du second ordre en $t \to R(t)$, en des équations du premier ordre en une quantité qui dépend algébriquement de $t \to R(t)^{-1}R(t)$. Cette quantité, c'est le moment cinétique dans le repère du solide M. Elle s'obtient à partir $R^{-1}R$ en identifiant cette matrice antisymétrique à un vecteur Ω, puis en appliquant l'endomorphisme symétrique (noté abusivement A) associé à la forme quadratique A. inversement, étant donné $t \to M(t)$, on reconstruit le vecteur $\Omega(t) = A^{-1}M(t)$, l'endomorphisme antisymétrique $a(t): q \to \Omega(t) \wedge q$, puis on résout l'équation différentielle linéaire $\dot{R} = Ra(t)$ avec condition initiale $R(0) = I$ pour calculer le mouvement.

Proposition 3. (L EULER). En fonction du moment cinétique dans le repère du solide $t \to M(t)$, les équations du mouvement du solide en l'absence de forces extérieures s'écrivent

$$\dot{M} = M \wedge A^{-1}M$$

Preuve. On sait que le moment cinétique dans le repère de l'espace $\mu = RM$ est constant. Par conséquent, $0 = \dot{\mu} = R\dot{M} + M\dot{R}$, donc :

$$M = -R^{-1}\dot{R}M = -\Omega \wedge M = -A^{-1}M \wedge M$$

On voit sur l'équation de $\dot{M}.M = \dot{M}.A^{-1}M = 0$; donc $||M||$ et $\dot{M}.A^{-1}M$ sont constants (remarquer que $\frac{1}{2}\dot{M}.A^{-1}M = \frac{1}{2}A(\Omega) = E$ est l'énergie cinétique). Le mouvement de M se déroule donc sur des sphères, et à l'intérieur de champ sphère $\sum$, sur les lignes de niveau de la restriction à $\sum$ de l'énergie E. Les points critiques de E restreinte à une sphère sont des vecteurs propres de A^{-1} (les axes principaux d'inertie du solide). Il y a donc trois types de trajectoires.

- Les trajectoires ponctuelles, aux points critiques : elles correspondent à des mouvements de rotation (Ω est constante) stationnaire autour des axes principaux d'inertie.
- Les trajectoires situées sur les niveaux non critiques. Elles sont périodiques. Cela n'entraine pas nécessairement que le mouvement est périodique.
- Les trajectoires non ponctuelles situées sur le point critique. Elles ne sont pas périodiques.

3.3. Résolution des équations

Soit $v \in R^3$ un vecteur qui n'est pas vecteur propre de A. Alors $E(v)$ n'est pas une valeur critique de la restriction de E à la sphère de rayon $||v||^2$, et

$\{M: ||M||^2 = ||v||^2, E(M) = E(v)\}$ est une réunion des courbes fermées simples. Autrement dit, une fois la ligne de niveau qui porte la trajectoire paramétrée, la résolution de l'équation d'Euler avec condition initiale v est ramenée à celle d'une équation différentielle autonome en une dimension ; autrement dit, à une quadrature.

Supposant $t \to M(t)$ calculé, soit $t \to R_0(t)$ une famille de rotations telles que $R_0(t)M(t) = v$. Le mouvement cherché est une autre rotation $R(t)$ telle que $R(t)M(t) = v$ et $R(t)^{-1}\dot{R}(t) = A^{-1}M(t)$ pour tout t. Comme $R(t \quad R_0(t)$ fixe v, il existe $\theta(t) \in R$ tel que

International Journal of Modern Statistics
ISSN: 2958-8340 (Online)
Vol. 4, Issue No. 1, pp 33 - 48, 2024

$$R(t) = \exp(\theta(t)a_v)R_0(t)$$

L'équation différentielle $R(t)^{-1}R(t) = aA^{-1}M(t)$ se traduit par

$$\dot{\theta}(t)_{a_{M(t)}} + R_0(t)^{-1}\dot{R}_0(t) = aA^{-1}M(t)$$

Une quadrature livre $\theta(t)$ et donc l'expression du mouvement $R(t)$.

3.4. Quasi-périodicité

Le mouvement dans le deuxième cas (niveaux non critiques) n'est pas périodique en général, mais il s'en approche. En effet, les solutions sont confirmées dans des variétés compactes de dimension 2, les fibres de l'application $(\mu, E): TSO(3) \to R^4$

Proposition 4. Soit $(v, e) \in R^4$ une valeur régulière de (μ, E). Il existe des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sur $(\mu, E)^{-1}(v, e)$ à valeurs dans R/Z telles que

- Le long des solutions ϕ_1 et ϕ_2 sont constantes
- La restriction de $(\phi_1\ et\ \phi_2)$ à une fibre de (μ, E) est un difféomorphisme.

Autrement dit, les fibres non singulières de l'application $(\mu, E): TSO(3) \to R^4$ sont des tores, sur lesquels le mouvement est constitué de translations.

Preuve. Soit $t \to R(t)$ une solution de moment cinétique v et d'énergie cinétique e. Alors $M(t) = R(t)v$ est une solution de l'équation d'Euler qui est confinée dans une courbe fermée simple c, composante d'une ligne de niveau de la restriction de E à une sphère. Par conséquent, M est périodique. Soit T sa plus petite période, on définit une fonction : $\phi_1: c \to R/Z$ par $\phi_1(M(t)) = t/T$.

La fibre $F = (\mu, E)^{-1}(v, e)$ est l'ensemble des rotations R telles qu'il existe un point $m \in c$ tel que $Rm = v$. On prolonge ϕ_1 en une fonction sur F en posant $\phi_1(R) = \phi_1(m)$.

On se donne à nouveau une famille de rotations $t \to R_0(t)$ telle que

$$R_0(t)M(t) = v.$$

Elle n'est pas nécessairement périodique. Soit $\Psi_T \in R$ tel que

$$R_0(t) = \exp(\Psi_{Taz})R_0(0)$$

On note $\Omega_0(t)$ le vecteur tel que $R_0(t)^{-1}R_0(t) = a_{\Omega_0(t)}$.

De même, $a_{\Omega_0(t)} = R_0(t)^{-1}\dot{R}(t)$.

On remarque que, comme $R_0M = RM$, $(\Omega - \Omega_0) \wedge M = 0$, donc il existe une fonction $t \to \lambda(t)$ telle que

$$\Omega - \Omega_0 = \lambda M.$$

On cherche une fonction $t \to \psi(t)$ telle que $R_1 = \exp(-\psi_{a_v})R_0$ soit périodique, et telle que si $R\ exp = (\eta_{a_v})R_1$, alors $\dot{\eta}$ est constant. Or

$$\dot{\eta}_{aM} = R^{-1}\dot{R} - R_1^{-1}\dot{R}_1.$$

International Journal of Modern Statistics
ISSN: 2958-8340 (Online)
Vol. 4, Issue No. 1, pp 33 - 48, 2024
www.carijournals.org

$$= a_\Omega - a_{\Omega_0} + \psi_{aM}$$

$D'o$ù $$\eta = \dot{\psi} + \dot{\lambda}$$

On pose.

$$\psi(t) = \int_0^t -\lambda(s)ds + \frac{t}{T}\left(\int_0^t \lambda(s)ds + \psi_T\right)$$

Alors $\psi(t) = \psi_t$, donc R_1 est périodique, et $\dot{\eta}$ est constant.

On définit une fonction $\theta_2 : F \to \frac{R}{Z}$ en posant

$$\theta_2(\exp(\theta_v)R_1(t)) = \frac{\theta}{2\pi}$$

Alors $(\theta_1, \theta_2): F \to R^2/Z^2$ est un difféormorphisme,

4. Transformation de Legendre

4.1. Motivation

Manifestation, dans les équations d'Euler-Lagrange, la quantité $p(t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t))$ joue un rôle particulier.

Cela conduit à étudier $\frac{\partial L}{\partial q}: R^n \to (R^n)^*$. On va voir qu'elle a une interprétation géométrique intéressante.

4.2. Définition

Définition 5. Soit $f: R^n \to R$ une fonction convexe. Sa transformée de Legendre est la fonction convexe g ; $(R^n)^* \to R$ définie par

$$g(p) = \sup p(\dot{q})_{q \in R^n} - f(\dot{q})$$

Définition 6. Soit f une fonction lisse sur R^n. On dit que f est sur linéaire si

$$\lim_{\|\dot{q}\| \to \infty} \frac{f(\dot{q})}{\|\dot{q}\|} = +\infty$$

On dit que f est fortement convexe si la forme quadratique $\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}^2}$ est définie positive en tout point.

Lemme 3. Soit f une fonction lise, surlinéaire et fortement convexe, alors la borne inferieure qui définit $g(p)$ est atteinte en un unique point $\dot{q}_p$ caractérisé par

$$p = d\dot{q}_p = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_p)$$

En particulier, g est lisse et sa différentielle est donnée par

$$d_p g = \frac{\partial g}{\partial p}(g) = \dot{q}_p$$

Autrement dit, les applications

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} : R^n \rightarrow (R^n)^n et \; \frac{\partial g}{\partial p} \; (R^n)^n \rightarrow R^n$$

sont des difféomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Preuve. La surlinearité garanti que les sur-niveaux $\{\dot{q}; p(\dot{q}) - f(\dot{q}) \geq r\}$ sont des compacts, donc la borne supérieure est atteinte. Par convexité, $\{\dot{q}; p(\dot{q}) - f(\dot{q}) \geq r\}$ est un convexe. En chacun de ses points, on a $\frac{\partial g}{\partial p} = p$. Or le théorème des fonctions implicites s'applique à l'équation $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \; (\dot{q}) - p = 0$; les solutions $\dot{q}$ sont isolés et dépendent différentiablement du paramètre p. On conclut que la solution $\dot{q}_p$ est unique, et que $(p) = f(\dot{q}_p)$ dépend différentiablement de p.

Fixons $p_0 \in (R^n)^n$ et soit $q_0 = \dot{q}_{p_0}$ le point où $q \rightarrow p_0(\dot{q}) - f(\dot{q})$ atteint son maximum $g(p_0)$. Pour tout $p \in (R^n)^n$,

$$g(p) = sup_{\dot{q}} p(\dot{q}) - f(\dot{q}) \geq p(\dot{q}_0) - f(\dot{q}_0) - f(\dot{q}_0) = p(\dot{q}_0) - f(\dot{q}_0) + (p_0)$$

C'est-à-dire

$$p(\dot{q}_0) - g(p) \leq p(\dot{q}_0) - g(p_0)$$

Ceci prouve que p_0 est le point où $p(\dot{q}_0) - g(p)$ atteint son maximum et que $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}$ et $\frac{\partial g}{\partial p}$ sont donc réciproque l'un de l'autre.

Exemple 3. la transformée de Legendre d'une forme quadratique définie positive f est une forme quadratique définie positive g, et on a $g(p) = f(\dot{q}_p)$

En effet, si f est une forme quadratique définie positive, de matrice ${}^1/_2 \; G$, alors $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\dot{q})$ est la forme linéaire de matrice $\dot{q}^T G$. Par conséquent l'équation $p = \dot{q}^T G$ a pour solution $\dot{q}^T = G^{-1} p^T$, et

$$g(p) = p(\dot{q}_p) - f(\dot{q}_p) = pG^{-1}p^T - \frac{1}{2}pG^{-1}p^T GG^{-1} = \frac{1}{2}pG^{-1}p^T = f(\dot{q}_p)$$

Remarque 3. Le fait que $g(p) = f(\dot{q}_p)$ est vrai plus généralement pour les fonctions positivement homogènes de degré 2. En effet, comme $p = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_p)$,

$$g(p) = p(\dot{q}_p) - f(\dot{q}_p) = p\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_p), - f(\dot{q}_p) = 2f(\dot{q}_p) - f(\dot{q}_p) = f(\dot{q}_p)$$

5. Equations de Hamilton

Il est courant de ramener un système d'équations différentielles du second ordre dans R^n à un système d'équations du premier ordre dans $R^n x R^n$, en introduisant la variable supplémentaire $\dot{q}$. Dans le cas des équations d'Euler – Lagrange, il se trouve qu'en appliquant à une transformation de Legendre. Les équations obtenues, dans $R^n x(R^n)^n$, prennent une forme particulièrement élégante.

5.1. Une reformulation des équations de la dynamique

Soit un point matériel q de masse m évoluant dans un champ de potentiel V. on appelle impulsion de q la quantité $p(t) = m\dot{q}(t)$. Le principe fondamental de la dynamique $m\dot{q} = -\nabla V(q)$ peut aussi s'écrire comme un système de deux équations.

$$\begin{cases} \frac{1}{m} p(t) = \dot{q}(t) \\ \ddot{q} = -\nabla V(q) \end{cases}$$

Le second membre s'exprime en fonction de l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2} m(\dot{q})^2 + V(q)$ ou mieux, de la fonction $H(q,p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q), car\ \frac{1}{m} p = \nabla_p H\ et - \nabla V(q) = -\nabla_q H.$ On peut éviter d'utiliser le gradient si on accepte de voir l'impulsion p comme un vecteur ligne, c'est-à-dire comme force linéaire sur R^n. Autrement dit, on définit l'impulsion par $p = mq^t$, on voit

$$H(p,q) = \frac{1}{2m} pp^T + V(q)$$

Comme une fonction sur $R^n x(R^n)^*$, et alors les équations s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{m} p^T = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -dV(q) = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

5.2. Définition

On commence par introduire une classe d'équations différentielles remarquables.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

s'appelle équations de Hamilton associées au hamiltonien H.

Equivalence entre Euler-Lagrange et Hamilton

Théorème 3. Soit L un lagrangien lisse qui, comme fonction de $\dot{q}$ est surlineaire, et fortement convexe. Les équations d'Euler-Lagrange correspondantes sont équivalentes aux équations de Hamilton associées à la fonction.

$$H : R^n x(R^n)^* xR \to R, H(q,p,t) = sup_{\dot{q}} p(\dot{q}) - L(q,\dot{q},t),$$

Transformée de Legendre de L par rapport à la variable $\dot{q}$

A une solution $t \to (q(t), p(t))$ des équations d'Hamilton correspond la solution $t \to q(t)$ des équations d'Euler-Lagrange. Inversement, toute solution $t \to q(t)$ des équations d'Euler Lagrange se relève par $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t))$ en une solution des équations de Hamilton.

Preuve. Notons $(q, p, t) \to \dot{q}_p$ le point tel que

$$H(q, p, t) = P(\dot{q}_p) - L(q, \dot{q}_p, t)$$

On calcule

$$\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) = P\left(\frac{\partial \dot{q}_p}{\partial q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}_p, t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p}(q, \dot{q}_p, t)\left(\frac{\partial \dot{q}_p}{\partial q}\right),$$

Soit $t \to q(t)$ une courbe dans R^n. Posons $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\big(q(t), \dot{q}(t)\big)$. D'après lemme 3 à q et t fixé, l'application $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ est un difféormophisme réciproque de $\frac{\partial H}{\partial p}$, donc $\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t)$, si $t \to q(t)$ est une solution des équation d'Euler-Lagrange, alors $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\big(q(t), \dot{q}(t)\big) - \dot{p}(t) = 0$. Donc $\dot{p}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t)$, ceci prouve que $t \to (q(t), p(t))$ est solution des équations de Hamilton.

Réciproquement, supposons que $t \to (q(t), p(t))$ est une solution des équations de Hamilton. D'après le lemme 4.3. l'équation $\dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t))$, montre que $\dot{q}(t) = \dot{q}_{p(t)}$ d'où, $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), p(t), t)$ et $\frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t) = -\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t)$. Avec la deuxième équation de Hamilton, $\dot{p}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t)$, il vient

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) = \frac{d}{dt}p(t) = \dot{p}(t) = -\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t),$$

Ce sont des équations d'Euler Lagrange.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, N., Les structures fondamentales de l'Analyse, (Hermann)

[2] BERKOVICH, V.G., Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 33. American Mathematical Society, Providence. RI. 1990

[3] BOSCH S. GUNTZER, U. & SOULE, C., "Non-Archimedean Arakslov theory", J. Algebraic Geometry 4 (1995)

[4] DEMAILLY, J-P., "Mesures de Monge Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines». Mém. Soc. Math.France (1985), N°19, p.124

[4] DEMAILLY, J-P.. "Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory », in complex analysis and geometry, Univ. Ser. Phenum. New-York. 1993

[5] DAUTRAY, R. et LIONS, J. L.. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques, (Masson 1986)

[6] KREEP. and SOIZEC., Mathematics of Random Phenomena. (Reidel Publishing Company 1986).

[7] LIBERMAMNP., Géométrie Différentielle. Chapitre IX du volume II de l'algèbre d'histoire des mathématiques édité par J. Dieudonné. (Hermann 1978).

[8] MAILLOT, « Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intenables ». Mem. Soc. Math. France (2000)

[9] PEDERSEN, G.K.. Analysis Now, (Springer Verlag 1990)

[10] THUILIERA, ‘’ Théorie du potential sur les courbes en géométrie non archimédienne, applications à la théière d’arakelov », Thèse, Université de Rennes 1, 2005.

[11] YUANX, « Big line bundles on arithmetic varieties », 2006, arXiv : math. NT/0612424.

[12] KILBAS, A.A., SRIVASTAVI, H.M., TRUIJILLO, J.J. : Theory and applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[13] HILFER, R., Applications of fractional calculus in physics. World Sci. Publising, Redding, River Edge, NJ, 2000.

[14] MAGIN, RL. : Fractionnal Calculus in Bioengineering. Begell House Publisers, Redding, CT, 2006.

[15] HERMANN, R. : Fractionnal calculus, An introduction for physicists. World Scie. Publuising, Singapore, 2011.

[16] METZLER, R., KLAFTER, J., The restaurant at the end of the randon walk : recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamcis, J. Phys. A37, R161-R208, 2004

[17] JLAGESN, R., RADONS, G., SOKOLOV, IM, Anomalous transport : Foundations and applications. Wiley-VCH, Weinheim, 2007.

[18] LASKIN, N. : Fractional Schrödinger equation, Phys. Rev. E(3)66, 056108, 7 pp, arXivquant-Ph/0410028, 2002.

[19] NABERN, M : Time Fractional Schrödinger equation, J. Math. Phys. 45, 3339-3352, arXivquant-Ph/0410028, 2004

[20] IOMIN, A. : Accelerator dynamics of fractionnal kicked rotor, Phys. Rev. E75, 037201, 4pp, arXivquant-Ph/0410028, 2007

[21] TARASOV, V.E : Franctionnal Heisenberg equation, Phys. Lett. A372, 2984-2008.

[22] KETOV, S.V., PRAGER, Ya.S : on the square root of the Dirac equation whitien extended supersymmetry, Acta phys. Polon, B21, 463-467, 1990

[23] TARASOV, V.E : Franctionnal vector calculus and fractionnal Maxwell's equations. Ann, Physics 323, 2756-2778, 2008.

[24] MUSLIH, S.I, AGRAWAL, OP., BALEANU, D. : A fractionnal Dirac equation and its solutions, J. Phys. A43, 0552203, 13 pp, 2010.

[25] LAZO, M.J., gaufe invariant fractionnal electromagnetics fields, Phys. Lett. A375 ; 3541-3546, 2011.